ゲージ場理論 － ^{3}He－Aへの応用*

筑波大物理学系　　新井孝昭・宗田敏雄

^{3}He－A で渦系，渦輪，点欠陥，線状織目構造等の拡がりを持った物体の存在の為に系が多重連結になっており，それを局所的にゲージ不変な形式で記述することが出来る[1)]。その時，超流動速度はゲージ群の Lie代数の Morera-Cartan の関係式に従うので，それを解いて超流動速度場を回転自由な場と，その残りの拡がりを持った物体の場への発散自由な寄与とに分けて求める。これは超流動 ^{3}He の dynamics を研究する基礎の一つとなると思われる。

^{3}He－A の中の秩序パラメーター A_{pi} は次の様に変換される。

$$A_{pi} \to A'_{pi} = e^{i\varphi} R^{(1)}_{pm} R^{(2)}_{ni} A_{mn} \, . \tag{1}$$

ここで添字 p と i は夫々運動量とスピンを表わす。秩序パラメーターの空間は $U(1) \times (SO(3))_1 \times (SO(3))_2$ で与えられ，A_{pi} は非可換群を形成する。従って ^{3}He－A の秩序パラメーターは次の形に書ける。

$$A = e^{i\varphi} R_1 A_0 R_2 \quad , \tag{2}$$

今，^{3}He－A の軌道の dynamics だけに限定すると，(2)式は次の形に書ける。

$$A = e^{i\varphi} A_0 R \tag{3}$$

非一様な超流体の超流動密度は次の様に定義出来るし，

$$\rho_{ij} = (A^{\dagger} A)_{ij} \, , \tag{4}$$

また超流動速度 v は次の様に出来る。

$$v^k_{ij} = -\partial^k \varphi \delta_{ij} + i(R^{\dagger} \partial^k R)_{ij} \tag{5}$$

ARAI Takaaki, SODA Toshio

*) これは1979年7月12日東大物性研の「超低温に於ける液体及び固体ヘリウム」の研究会で講演したものを修正加筆したものである。

ここで ∂^k は $\partial/\partial x^k$ の略で，k はデカルト座標の第 k 成分である。ここで(4)と(5)はエルミート行列で，行列 v^k_{ij} はゲージ群の Lie 代数の Morera-Cartan の関係式を満たす。

$$\partial^k v^l - \partial^l v^k = i^{-1}\left[v^l,\ v^k\right]\ . \tag{6}$$

$$\partial^k \rho = \left[v^k,\ \rho\right]\quad , \tag{7}$$

(6)式は，He II でも満すことは Khalatnikov の仕事[2] にも示されている。

我々は(6)式を場の理論で行われる方法[3] にまねて試みよう。まづ(6)式の右辺の交換関係 $\left[v^l,\ v^k\right]$ が小さいとして小さなパラメーター λ を掛けておく。そして(6)式の両辺に ∂^k を掛けると

$$\partial^{k2} v^l = \partial^l \partial^k v^k + \frac{\lambda}{i}\partial^k\left[v^l,\ v^k\right]。 \tag{8}$$

が得られる。

ここでまづ2次元の場合を扱ってみよう。2次元のグリーン関数 $G^{(2)}(\boldsymbol{r})$ が

$$\nabla^2 G^{(2)}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}') = \delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}') \tag{9}$$

を満すものを導入すると，(8)式で k を x 成分と y 成分について和を取ったものを反転 (invert) して超流動速度 v^l を求めると

$$v^l(\boldsymbol{r}) = \int G^{(2)}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\left[\sum_k \partial'^k(\partial'^l v'^k - \partial'^k v'^l) + \sum_k \partial'^{k2} v'^l\right] d^2r' + \mathrm{O}(\lambda) \tag{10}$$

となる。この式で〔　　〕内は(8)式の第1項を2つの項の和として書き直した他第2項を λ のオーダーの項としておいた。ここで速度場 $\boldsymbol{v}$ を回転自由な (rotation free) 部分，$\boldsymbol{v}_1 = -\mathrm{grad}\ \phi$ と発散自由な (divergence free) 部分 $v_2 = i(R^{-1}\partial^k R)_{ij}$ とに分解出来る。後者が divergence free になることは流れのわき出しと関係する v_1 の源 (source) の場所を除いて超流動速度 v には保存則 $\partial^k v^k = 0$ が成立することより証明される。さて(10)式の l として x 成分を取り，(10)式の第2項 $\sum_k \partial^{k2} v^l$ の項に Morera-Cartan の(6)の関係式を用いることにより

$$(\partial^{x2} + \partial^{y2})v^x = \partial^x(\partial^x v^x + \partial^y v^y) + \mathrm{O}(\lambda) = -\partial^x \nabla^2 \phi + \mathrm{O}(\lambda) \tag{11}$$

となることが解かる。従って2次元の渦度 $n(\boldsymbol{r})$ を次の様に定義して，

$$n(\boldsymbol{r}) = \partial^y v^x - \partial^x v^y \tag{12}$$

(10)式は次の形になる。

$$v_{ij} = -\mathrm{grad}\,\varphi\,\delta_{ij} + (z\times\nabla)\int n(\boldsymbol{r}')G^{(2)}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\,d^2\boldsymbol{r}' \tag{13}$$

(13)式は He II の vortex pair の議論する時に Nelson-Kosterlitz[4]が現象論的に導入したもので，ここに始めて導かれた。

3次元の場合は(8)式で例えば l を y 成分とすると(10)式に対応する3次元の式で被積分項の四角い括弧の中は次の様に書き直せる。

$$[\partial^z(\partial^y v^z - \partial^z v^y) - \partial^x(\partial^y v^x - \partial^x v^y) + (\partial^{x2} + \partial^{y2} + \partial^{z2})v^y]。 \tag{14}$$

3次元の渦密度として $\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{r})$ を導入し，

$$\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{r}) = \nabla\times\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}) \tag{15}$$

と定義する。3次元のグリーン関数 $G(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')$ として

$$\Delta G(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}') = \delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}') \tag{16}$$

を満すものを導入すると，2次元の場合と同様に回転自由な場と発散自由な場に速度場を分けることが出来ることを用いて，速度場を求めると次の様な結果が出る。

$$v(\boldsymbol{r})_{ij} = -\mathrm{grad}\,\phi\,\delta_{ij} + \nabla\times\int G(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\,\omega_{ij}(\boldsymbol{r}')\,d^3\boldsymbol{r}' \tag{17}$$

λ の高次迄近似を進めると対，3個，4個…の個数の渦度 (vortices) の寄与が求まる。これらの渦度は拡がりを持った物体の位相的電荷を表わしている。

文　献

1) V. L. Golo and M. I. Monastyrski; Lett. Math. Phys. **2** 379 (1978).

2) I. M. Khalatnikov; Introduction to Theory of Superconductivity.

3) A. A. Slavnov and L. D. Faddeev; Theor. and Math. Phys. **8** 297 (1971).

4) D. R. Nelson and J. M. Kosterlitz ; Phys. Rev. **39** 1201 (1977).